

Séries de Fourier

Fiche d'exercices numéro 5.

Exercice 1.

On considère la fonction f 2π -périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \max(0, \sin t)$.

1. Montrer que sa série de Fourier est $F[f](x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nt$.
2. Montrer que f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
3. Déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Exercice 2.

Soit f la fonction paire, de période 2π , égale à $(\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f .
2. Montrer que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Calculer également $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3.

Déterminer la série de Fourier de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

et déduire la somme de la série numérique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$.

Exercice 4.

On donne l'équation différentielle $y'' + y = |\sin x|$. Trouver la solution qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. (On pourra utiliser le développement en série de Fourier de $x \mapsto |\sin x|$).

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction f .
2. Etudier la convergence (simple, et uniforme) de la série de Fourier de f .
3. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Exercice 6.

Soit f la fonction périodique de période 2 vérifiant $f(x) = x - x^3$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f .

2. En déduire la somme de la série $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

Exercice 7.

Soit f la fonction impaire et 2π -périodique définie par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ si $x \in]0, \pi[$, et soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

1. Déterminer les séries de Fourier de f et g .

2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Exercice 8.

1. Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{x + e^a}$, $a > 0$.
 2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$, on a :

$$\frac{1}{\cos x + \cosh a} = \frac{1}{\sinh a} \left(\frac{e^a}{e^{ix} + e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{ix} + e^{-1}} \right).$$

3. En déduire le développement en série de Fourier de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{\cos x + \cosh a}, \quad a > 0.$$

Exercice 9.

1. Vérifier que $\forall t \in [-\pi, \pi[$,

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2}; \quad (1)$$

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad t = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n} \quad (2)$$

2. Soit $a > 0$, montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2 + a^2}.$$

Former une équation différentielle vérifiée par f . En déduire une expression de f .

3. Prouver l'existence et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nt}{n^2 + a^2} \quad t \in [-\pi, \pi].$$